RELACION DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 1996/97.

1º. - Explica cómo se puede hallar el área de un triángulo, a partir de sus coordenadas, en el espacio tridimensional, y aplica dicho procedimiento para hallar el área del triángulo de vértices A = (-1,0,0), B = (1,0,1) y C = (0,2,3).

2º. - Considera el plano de ecuación $\pi \equiv x - y + 1 = 0$ y el punto A = (2,0,1). Determina las ecuaciones de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto A, y calcula las coordenadas del punto A' que es simétrico del punto A respecto al plano π.

3º.- Determina la ecuación del plano que es paralelo al vector $\vec{u} = (1,2,3)$ y contiene a la recta que pasa por el punto P = (1,1,1) y es paralela al vector $\vec{v} = (1,1,1)$.

4º. - Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P = (1,1,1) y es perpendicular al vector $\vec{u} = (1,2,3)$.

5º. - Considera los planos de ecuaciones:

$$\pi \equiv x + \beta y + z = 0, \qquad \pi' \equiv 2x - 3y + z - 5 = 0 \qquad \text{y} \qquad \pi'' \equiv x + y - 2z - 15 = 0$$

Determina β de modo que los tres planos tengan una recta común. Determina si para algún valor de β el plano π es perpendicular a los otros dos planos.

6º. - Considera las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} \beta x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

¿Para qué valor del parámetro β se cortan las rectas r y s?. Para dicho valor, calcular el punto de corte de ambas rectas.

7º. - Sean los puntos P = (1,0,1), Q = (0,1, -3) y R = (0,3,0). Calcula el punto P' que es la proyección del punto P sobre la recta que determinan Q y R. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan de P y de R.

8º. - Determinar el valor de "a" para el cual los planos cuyas ecuaciones se dan a continuación contienen una misma recta:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ay + z = 0 \\ x + (a+1)y + az = a + 1 \end{cases}$$

Halla el punto simétrico del origen de coordenadas respecto a la recta común a la que se refiere el apartado anterior.

9º. - Dados los puntos A = (1,0,0), B = (0,2,0) y C = (0,0,3), sean A' el simétrico de A respecto de B, B' el simétrico de B respecto de C y C' el simétrico de C respecto de A. Halla la ecuación del plano que pasa por A', B' y C'.

10º. - Calcula, describiendo el procedimiento empleado, las ecuaciones de una recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta en que se cortan los planos:

$$\pi \equiv x - y + 2z + 1 = 0 \quad \text{y} \quad \pi' \equiv x + 3y - z + 2 = 0.$$

11º. - Sean las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-m}{-1} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{m} = \frac{z+1}{2}$$

¿Para qué valor de "m" están contenidas en un mismo plano? En el caso de que m = 1, halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A = (1,1,2) y corta a r y a s.

12º. - Define el concepto de producto escalar de vectores en $\mathbf{R}^3$ y enuncia tres de sus propiedades. Encuentra un vector $\vec{w}$ cuya primera componente sea 2 y que sea perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1,-1,3)$ y $\vec{v} = (0,1,-2)$.

13º. - Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P = (1,0,2), es paralelo a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z-3$ y es perpendicular al plano de ecuación $\pi \equiv 2x - y + z = 0$.

14º. - Para los diferentes valores del parámetro "a", estudia la posición relativa de los planos siguientes:

$$\begin{cases} \pi \equiv x + y + z = a-1 \\ \pi' \equiv 2x + y + az = a \\ \pi'' \equiv x + ay + z = 1 \end{cases}$$

y, caso de ser posible, calcula el punto de corte de los tres para a = -1.

15º. - Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A = (1,1,2) y es paralelo a las rectas r y s dadas por:

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

16º. - Hallar el punto C que es la proyección ortogonal del punto B = (2,1,1) sobre el plano $\pi \equiv 2x + y - 2z = -6$. Halla un punto A sobre el eje OX tal que el área del triángulo ABC valga 6. ¿Cuántas soluciones hay?

17º. - Determina la ecuación del plano que contiene al punto P = (2,0,1) y a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{3}$. Calcula el ángulo que forman el plano anterior con la recta $s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

18º. - Calcula, de manera razonada, un plano que sea paralelo al plano de ecuación x + y + z = 1 y determine con los ejes de coordenadas un triángulo cuya área sea $18\sqrt{3}$.

19º. - Considera el tetraedro formado por el origen de coordenadas y los tres puntos en los que el plano 2x + 3y + 6z - 6 = 0 corta a los ejes coordenados. Describe un procedimiento para hallar el volumen de dicho tetraedro y calcula efectivamente su valor. Calcula razonadamente las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano.

20º. - Considera los puntos P = (1,1,1) y Q = (-1, -1,2). Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos que se encuentran a igual distancia del punto P que del punto Q. Halla la ecuación del plano que corta perpendicularmente y en su punto medio al segmento que une los puntos P y Q.

21º. - Considera el punto P = (2,1,3) y la recta r de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

Halla la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a r. Determina dos puntos A y B de la recta r de forma que el triángulo PAB sea equilátero.

22º. - Considera los puntos A = (0,0,0) y B = (2,2,2). Halla la ecuación del plano que contiene los puntos C que forman con A y B un triángulo equilátero. Indica qué lugar geométrico forman los puntos C descritos en el apartado anterior, expresando los elementos que lo determinan.

23º. - Considera el punto P = (1,0, -1) y la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$.

Halla la distancia del punto P a la recta r. Determina el plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r.

24º. - Sean P y Q dos puntos del plano situados, respectivamente, en los ejes OX y OY que son distintos del origen de coordenadas O. ¿Cuántas circunferencias pasan simultáneamente por O, P y Q? Justifica la respuesta. Describe un procedimiento geométrico para calcular una de las circunferencias mencionadas anteriormente. Aplica el procedimiento descrito para calcular el centro y el radio de una circunferencia que pase por los puntos P = (2,0), Q=(0,2) y O = (0,0).

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 1997/98.

25º. - Dados los puntos A = (1,0,1), B = (0,0,-1) y C = (3,a,b), se pide: (1) Determina, si es posible, a y b de forma que los tres puntos estén alineados. (2) Encuentra, si existe, un punto Q situados en el eje OY y tal que el triángulo ABQ sea rectángulo con ángulo recto en B. (3) Si D es el punto D = (2,0,-2), prueba que el triángulo ABD es rectángulo y calcula su área.

26º. - Halla la ecuación de una circunferencia sabiendo que su centro está en la recta de ecuación y = x + 1, que es tangente a la recta y = x y que también es tangente a la recta y = 0.

27º. - (1) Los tres planos cuyas ecuaciones son, respectivamente,

$$\begin{cases} x + 2y + az = 1 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

se cortan según una recta. ¿Cuánto vale a? (2) Determina el simétrico del punto P = (1,0,1) respecto a la recta determinada en el apartado anterior.

28º. - Calcula los vectores u = (1,a,b) y v = (c,d,0) de $\mathbf{R}^3$ de manera que formen un ángulo de 45º y cuyo producto vectorial sea el vector w = (1,1,0).

29º. - Halla la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto (0,2) y cuya directriz es la recta de ecuación y = -2.

30º. - Sean r y s las rectas dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 3x - 2y - 3 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Determina la ecuación de un plano que contenga a r y sea paralelo a s.

31º. - Cuatro puntos A, B, C y D tienen las coordenadas siguientes:

A = (1,2,3)   B = (0,1,-2)   C = (3,1,0)   y   D = (m,-1,4)

(1) ¿Existe algún valor de m para el que los cuatro puntos están sobre una línea recta? En caso afirmativo, determina dicha recta; en caso negativo, di por qué no están alineados.
(2) ¿Existe algún valor de m para el que los cuatro puntos están en un mismo plano? En caso afirmativo, determina dicho plano; en caso negativo, di por qué no son coplanarios.
(3) Para m = 2, ¿determinan estos cuatro puntos un tetraedro? En caso afirmativo, calcula el volumen de dicho tetraedro; en caso negativo, di por qué no lo determinan.

32º. - Considera los planos de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y + \quad z = 3 \\ \ \ x - y + \quad z = 8 \\ 3x - y + mz = -2m \end{cases}$$

(1) Determina si existe y, en ese caso, calcula el valor del parámetro m para el cual los tres planos se cortan según una línea recta. (2) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta determinada en el apartado anterior y pasa por el punto (2,1,3).

33º. - Sean π_1 y π_2 los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv x - 2y + z + 3 = 0 \qquad y \qquad \pi_2 \equiv x - 2y + z - 4 = 0.$$

Explica algún procedimiento para saber si un punto de $\mathbf{R}^3$ se encuentra entre los dos planos y aplícalo para saber si el punto P = (2,2,1) se encuentra o no entre dichos planos.

34º. - Considera el tetraedro de vértices A = (1,0,0), B = (0,1,0), C = (0,0,1) y D = (0,0,0). (1) Halla la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C. (2) Halla la mínima distancia entre la recta r y la recta que pasa por los puntos A y B. (3) Calcula el volumen del tetraedro.

35º. - Considera el plano π y la recta r dados por

$$\pi \equiv ax + 2y - 4z + b = 0 \qquad\qquad r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$$

(1) Halla los valores de a y b para los que r está contenida en π. (2) ¿Existen algún valor de a y algún valor de b para los que la recta dada r es perpendicular al plano π?

36º. - Determina y representa el lugar geométrico formado por los puntos P=(x,y) del plano que verifican la siguiente propiedad: El triángulo PAB cuyos vértices son P, A=(2,0) y B=(-2,0) es rectángulo con el ángulo recto en P.

37º. - (1) ¿Cuál es el punto P de la recta r de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

que está más cerca del punto A = (2,3,-1)? (2) Halla el área del triángulo cuyos vértices son A, P y B = (1,0,0).

38º. - Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P = (1,0,2) y corta a las rectas r y s dadas por:

$$r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} 2x + 6y + \ \ 2 = 0 \\ \qquad y + 2z = 0 \end{cases}$$

39º. - Sea π el plano de ecuación $\pi \equiv 3x - 2y - 6z = 1$ y sea r la recta dada en forma vectorial por

$$r \equiv (x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(2,-1,1) \qquad (\lambda \in \mathbf{R})$$

(1) ¿Cómo se define la relación de paralelismo entre una recta y un plano? (2) En el caso concreto de la recta r y el plano π, ¿cómo averiguarías si son paralelos? (3) ¿Cómo se define la relación de perpendicularidad entre una recta y un plano? (4) En el caso concreto de la recta r y del plano π, ¿cómo averiguarías si son perpendiculares? Comprueba si lo son.

40º. - Considera el punto P = (-1,2,1). (1) Determina un punto Q del plano de ecuación -3x + y + z + 5 = 0 de forma que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular al plano. (2) Determina un punto de la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-10}{-1}$ de forma que el vector $\overrightarrow{MP}$ sea paralelo al plano anterior. (3) Calcula el área de l triángulo MPQ.

41º. - Halla el punto Q simétrico del punto P = (2,0,1) respecto de la recta r que pasa por el punto A = (0,3,2) y es paralela a la recta s de ecuaciones:

$$s \equiv \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

42º. - Considera la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 13$. (1) Represéntala indicando su centro y su radio. (2) Halla el área de la figura limitada por las tres rectas siguientes: (a) La recta tangente a la circunferencia en el punto A = (3,2), (b) la recta normal a la circunferencia en el punto A, (c) el eje de abscisas.

43º. - Los puntos A = (1,2) y B = (5,6) son los extremos de un diámetro de una circunferencia. (1) Hallar la ecuación de la circunferencia. (2) Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en le punto A.

44º. - Un paralelogramo cuyo centro es el punto M = $(\frac{3}{2},3,4)$ tiene por vértices los puntos A = (1,2,3) y B = (3,2,5). (1) Hallar las coordenadas de los otros vértices. (2) Hallar la ecuación de la recta que pasa por M y es perpendicular al plano que contiene al paralelogramo. (3) Calcula el área del paralelogramo.

45º. - Sea π el plano que pasa por los puntos (1,0,0), (0,1,1) y (1,1,1). Sea A el punto (1,2,3) y sea B el simétrico de A respecto al plano π.(1) Halla la recta que pasa por A y por el punto medio del segmento AB. (2) Halla la recta paralela a la anterior que pasa por el punto (2,2,2).

46º. - Un objeto se mueve en el espacio siguiendo una línea recta cuya dirección viene dada por el vector v = (1,2,-1). En su movimiento, dicho objeto pasa por el punto A = (2,1,2). (1) Calcula los puntos de corte de la trayectoria del objeto con los planos coordenados. (2) Calcula la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a dicha trayectoria. (3) ¿Cuál es el ángulo que forma la trayectoria del objeto con el plano XOY?

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 1998/99.

47º. - Halla el punto del plano de ecuación x - z = 3 que está más cerca del punto P = (3,1,4) así como la distancia entre el punto P y el plano dado.

48º. - Sean los vectores u = (-1,2,3), v = (2,5,-2), x = (4,1,3) y z = (4,1,-8).
(a) ¿Se puede expresar x como combinación lineal de u y v? Si es así, escribe dicha combinación lineal; si no es así, explica por qué.
(b) ¿Se puede expresar z como combinación lineal de u y v? Si es así, escribe dicha combinación lineal; si no es así, explica por qué.
(c) ¿Son u, v y z linealmente independientes? Justifica la respuesta.

49º. - Calcula un punto R de la recta s dada por

$$s \equiv \begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ x - 3y - z - 7 = 0 \end{cases}$$

que equidiste de los puntos P = (1,0,-1) y Q = (2,1,1). Calcula el área del triángulo determinado por los puntos P, Q y R.

50º. - Prueba que todos los planos de la familia

$$(3 + \lambda)x + (3 - \lambda)y + (5 - 2\lambda)z = \lambda$$

(con $\lambda \in$ **R**) contienen a una misma recta y halla unas ecuaciones paramétricas de dicha recta.

51º. - Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C = (3,2) y una de cuyas rectas tangentes tiene de ecuación 4x - 3y - 5 = 0. Determina si el punto X = (3,3) es interior, es exterior o está en la circunferencia.

52º. - Considera el plano $\pi \equiv$ 2x + 2y + z + 7= 0, la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$ y el punto A = (1,5,-4). (a) Determina razonadamente si existe y, en ese caso, halla un punto B de la recta r tal que la recta que pasa por los puntos A y B es paralela al plano π. (b) Determina razonadamente si existe y, en ese caso, halla un punto C de la recta r tal que la recta que pasa por los puntos A y C es perpendicular al plano π.

53º. - Considera la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. (a) Determina la ecuación del plano π_1 que es perpendicular a la recta r y pasa por el punto P = (1,2,3).

Determina la ecuación del plano π_2 que es paralelo a la recta r y pasa por los puntos P = (1,2,3) y Q = (-1,0,2). (c) Sea s la recta en la que se cortan los planos π_1 y π_2. Determina de forma razonada la posición relativa de las rectas r y s.

54º. - De todos los planos que contienen la recta r dada por:

$$r \equiv \begin{cases} x - 4y + 9 = 0 \\ 3y - z - 9 = 0 \end{cases}$$

(a) Determina el que pasa por el punto P = (1,4,0). (b) Determina uno que esté a 3 unidades de distancia del origen. ¿Cuántas soluciones hay?

55º. - Considera la recta r y el plano π dados, en función de un parámetro real a, por las ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x + (1+a)y + z = 0 \\ (2+a)x - y - 2z = 0 \end{cases} \quad y \quad \pi \equiv 3x - z = a$$

(a) Estudia la posición relativa de la recta y el plano según los valores de a.
(b) Para a = 1 determina el punto de intersección de la recta con el plano.

56º. - Consideremos el punto P = (1,0,-1) y la recta r dada por:

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Halla el punto de r más cercano a P y la distancia entre P y r.
(b) Determina el plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r.

57º. - Se sabe que la siguiente matriz M tiene rango 1:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & a & b \\ 2 & c & d \end{pmatrix}.$$

(a) ¿Pueden determinarse a, b, c y d? Justifica la respuesta y, en caso afirmativo, hállalos. (b) ¿Cuál es la situación de los planos de ecuaciones respectivas:

$$\pi_1 \equiv 5x + 6y + 7z = 0, \quad \pi_2 \equiv x + ay + bz = 0 \quad y \quad \pi_3 \equiv 2x + cy + dz = 1?$$

58º. - (a) Demuestra que las rectas r y s dadas por:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -\mu \\ z = 4 + 2\mu \end{cases}$$

se intersecan y halla el punto dónde lo hacen. (b) Halla la ecuación del plano que contiene las rectas r y s.

59º. - (a) Determinar los valores del parámetro a para los que los siguientes vectores de $\mathbf{R}^3$: (1,1,a), (a,3,2) y (0,0,a) son linealmente independientes. Justifica la respuesta. (b) Determina la posición relativa de los planos cuyas ecuaciones son:

$$\pi_1 \equiv x + y + 3z = 5, \quad \pi_2 \equiv 3x + 3y + 2z = -8 \quad \text{y} \quad \pi_3 \equiv 3z = 3$$

60. - Calcula todos los planos perpendiculares a la recta r de ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = -10 + 5t \\ y = 100 \\ z = 250 - 12t \end{cases}$$

que se encuentra a 2 unidades de distancia del punto P = (2,-7,1).

61º. - Dado el punto A = (3,1,0), halla su simétrico respecto de la recta r dada por las ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = -2t \end{cases}.$$

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 1999/00.

62º. - Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A = (1,6) y B = (5,2) y tiene su centro sobre la recta y = 2x.

63º. - Los puntos A = (3,3,5) y B = (3,3,2) son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. El vértice C consecutivo de B está en la recta de ecuación en forma continua $x = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Determina los vértices C y D.

64º. - Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A = (0,2), B = (0,-2) y C = (-1,1). Determina los valores de m tales que el punto (3,m) está en la circunferencia determinada en (a).

65º. - Calcula el punto de la recta de ecuaciones:

$$x - 1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-3}$$

más cercano al punto A = (1,-1,1).

66º. - Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es (-1,2,1).

67º. - Halla las coordenadas del simétrico del punto P = (1,2,-2) respecto al plano de ecuación $3x + 2y + z - 7 = 0$.

68º. - Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de intersección de las rectas de ecuaciones:

$$2x - y - 4 = 0 \quad \text{y} \quad x + 2y + 3 = 0$$

y es tangente a la recta $x - 3y + 3 = 0$. Calcula el punto de tangencia.

69º. - Determina los puntos de la recta de ecuaciones:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$$

que equidistan de los planos:

$$3x + 4y - 1 = 0 \quad \text{y} \quad 4x - 3y - 1 = 0.$$

70º. - Halla la distancia desde el origen de coordenadas y la recta intersección de los planos de ecuaciones respectivas:

$$x + y + 2z = 4 \quad \text{y} \quad 2x - y + z = 2.$$

71º. - Calcula las coordenadas del simétrico del punto (1,-3,7) respecto a la recta dada por las ecuaciones:

$$x - 1 = y + 3 = \frac{z-4}{2}.$$

72º. - Halla las ecuaciones de la recta que se apoya perpendicularmente en las rectas r y s definidas, respectivamente, por:

$$r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{-2}, \quad s \equiv \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}.$$

73º. - Calcula el volumen de un cubo sabiendo que dos de sus caras están, respectivamente, en los planos $2x - 2y + z - 1 = 0$ y $2x - 2y + z - 5 = 0$.

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 2000/01.

74º. - Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A = (1,0,-1), es perpendicular al plano $x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta $\left\{\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$.

75º. - Calcula "a", sabiendo que los planos $ax + y - 7z = -5$ y $x + 2y + a^2z = 8$ se cortan en una recta que pasa por el punto A = (0,2,1) pero que no pasa por el punto B = (6,-3,2).

76º. - Considera los tres planos siguientes:

$\pi_1 \equiv x + y + z = 1, \qquad \pi_2 \equiv x - y + z = 2 \qquad y \qquad \pi_3 \equiv 3x + y + 3z = 5.$

¿Se cortan π_1 y π_2?, ¿hay algún punto que pertenezca a los tres planos?

77º. - Considera los puntos A = (1,2,3), B =(3,2,1) y C = (2,0,2). Halla el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano que contiene a A, B y C.

78º. – Determina el centro y el radio de la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas, tiene su centro en el semieje positivo de abscisas y es tangente a la recta de ecuación x + y = 1.

79º. – Considera los puntos A = (1,0,3), B = (3,-1,0), C = (0,-1,2) y D = (a,b,-1). Calcular a y b sabiendo que la recta que pasa por A y B corta perpendicularmente a la recta que pasa por C y D.

80º. – Considera los planos $\pi_1 \equiv 2x + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv 3x + 3y - 4 = 0$. (a)¿Qué ángulo determinan ambos planos? (b) Halla el plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos dados.

81º. – Sea r la recta de ecuaciones: $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$. (a) Halla los puntos de r cuya distancia al origen es de 7 unidades. (b) Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto P = (1,2,-1).

82º. – Halla las coordenadas del punto simétrico de A = (0,-1,1) con respecto a la recta

$$\frac{x-5}{2} = y = \frac{z-2}{3}.$$

83º. – Halla el punto de la recta $x = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1}$ que equidista del punto A=(1,2,1) y del origen de coordenadas.

84º. – Considera el plano 2x + y + 2z – 4 = 0. (a) Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano dado con los ejes coordenados. (b) Calcula la distancia del origen al plano dado.

85º. – Determina todos los puntos del plano 2x – y + 2z – 1 = 0 que equidistan de los puntos A = (3,0,-2) y B = (1,2,0). ¿Qué representan geométricamente?

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 2001/02.

86º. – Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$ con la recta $s \equiv \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralelo a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y \qquad - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

87º. – Calcula el área del triángulo de vértices:

A = (1,1,2), B = (1,0,-1) y C = (1,-3,2).

88º. – Los puntos A = (1,0,2) y B = (-1,0,-2) son vértices opuestos de un cuadrado. (a) Calcula el área del cuadrado. (b) Calcula el plano perpendicular al segmento de extremos A y B que pasa por su punto medio.

89º. – Considera el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 3$ y el punto A = (-1,-4, 2). (a) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por A. (b) Halla el punto simétrico de A respecto al plano π.

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 2002/03.

90º. – Sabiendo que las rectas:

$$r \equiv x = y = z \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

se cruzan, halla los puntos A y B, de r y s respectivamente, que están a la mínima distancia.

91º. – Determina el punto P de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$ que equidista de los planos

$$\pi_1 \equiv x + y + z + 3 = 0 \qquad y \qquad \pi_2 \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 - \mu \end{cases}.$$

92º. – Se sabe que los puntos A = (1,0,-1), B = (3,2,1) y C = (-7,1,5) son vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD. (a) Calcula las coordenadas del punto D. (b) Halla el área del paralelogramo.

93º. – Los puntos A = (1,1,0) y B = (2,2,1) son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. Se sabe que los vértices C y D están contenidos en una recta que pasa por el origen de coordenadas. Halla C y D.